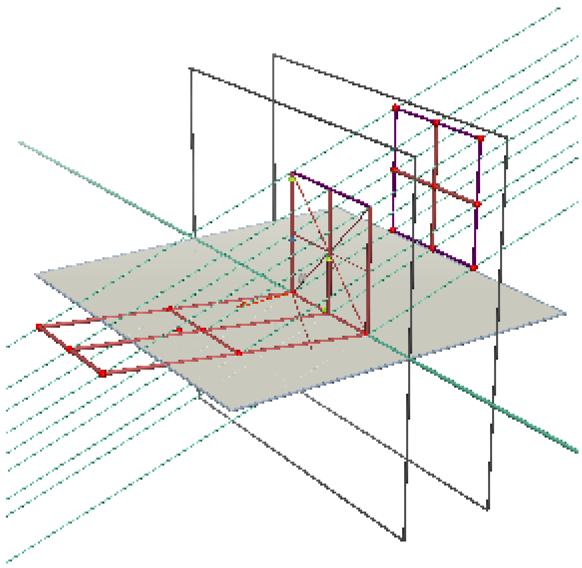
AFFINITA' OMOLOGICA



Dato un piano, una sua retta r, e un numero reale k, una direzione δ non parallela ad r, si costruisca una corrispondenza tra i punti di π operando nel modo seguente (cfr. fig.1)

Ad ogni punto P si fa corrispondere il punto P' tale che

La retta PP' abbia direzione δ

P' appartiene allo stesso semipiano di P se k è positivo, sul semipiano opposto se k è negativo

detto Q il punto comune a PP' e ad r, risulti

$$\frac{P'Q}{PQ} = |k|$$

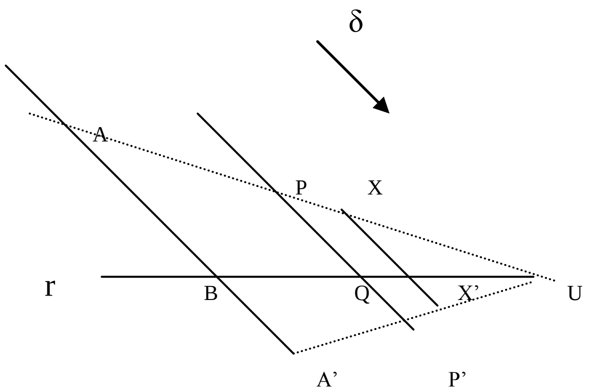


fig.1

Si verifica facilmente che

Ogni punto U della retta r è unito

se P descrive la retta AU, il suo corrispondente P' descrive la retta A'U

infatti, costruita tra le rette AU e A'U una corrispondenza di Talete, dalle uguaglianze

$$\frac{AB}{PQ}=\frac{BU}{QU}=\frac{A'B}{P'Q}$$

si deduce che

$\frac{AB}{A'B}=\frac{PQ}{P'Q}$ quindi P’ è proprio il corrispondente di P nella trasformazione considerata

La trasformazione così definita è un’affinità (in quanto è biunivoca e muta rette in rette) e prende il nome di **affinità omologica** ovvero **omologia affine,** di. ▪ Asse r ▪ Direzione δ ▪ Rapporto o caratteristica k.

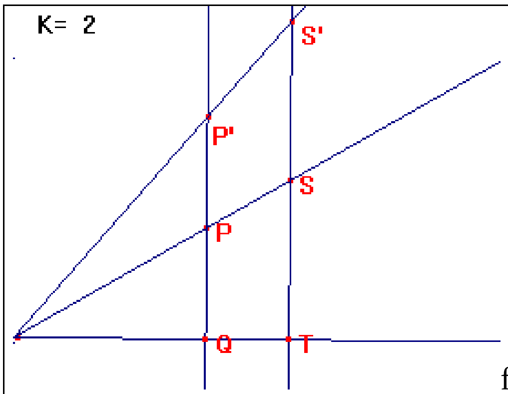
Ovvero

L’ affinità omologica è una particolare affinità che possiede

- Una retta puntualmente unita (l’asse)
- Infinite rette globalmente unite, appartenenti ad un fascio improprio di direzione **δ**

PROPRIETA’

1) **La retta r è puntualmente unita, le rette del fascio di direzione δ sono globalmente unite**
2) **Punti corrispondenti giacciono su una retta parallela a δ**
3) **Rette corrispondenti si incontrano sull’asse o sono parallele all’asse.**
4) **La trasformazione subordina su ogni retta parallela . a δ un’omotetia**

 fig.2	se la direzione **δ** è ortogonale alla direzione dell’asse, l’omologia affine si dice ortogonale (**stiramento**) (fig.2)
	Una omologia affine di caratteristica (rapporto) -1 è una **simmetria obliqua (piana)**. (fig.3)

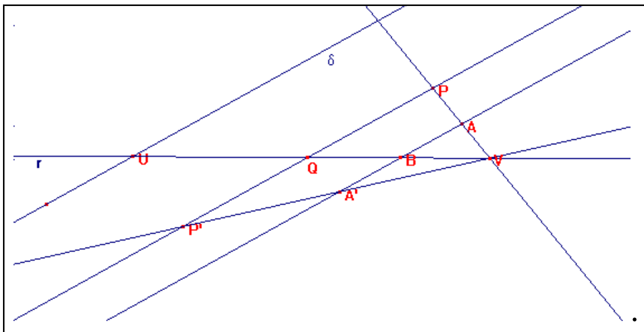
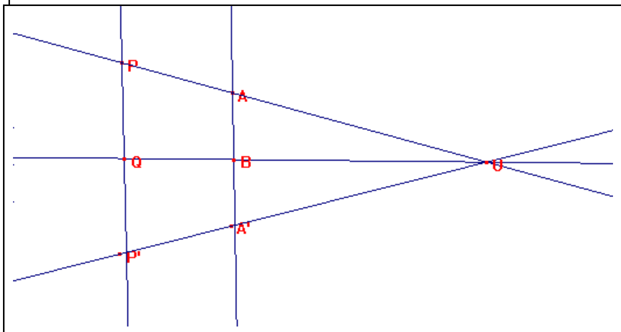


fig.3



(fig.4)

La **simmetria assiale** rispetto ad una retta r è una particolare omologia affine di

- Asse r
- Direzione perpendicolare ad r
- Rapporto k = -1

(fig.4)

Per k =1 , qualunque sia la direzione δ il punto P resta unito e la trasformazione si riduce all'identità

L'identità è una particolare affinità omologica

GENESI SPAZIALE

La figura 5 illustra la genesi spaziale dell'omologia affine

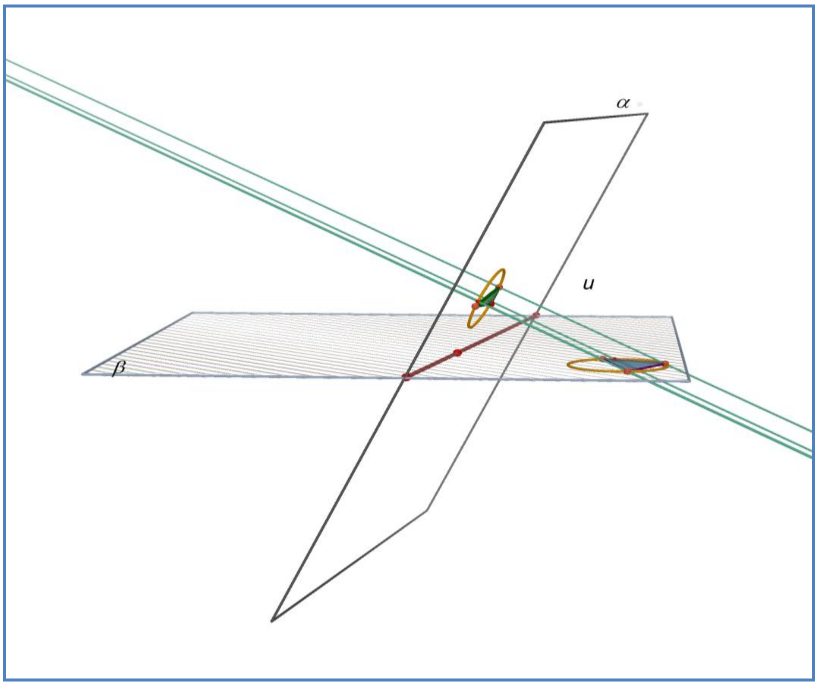


fig.5

I due piani α e β si incontrano lungo la retta *u*.

Le figure tracciate su α si possono considerare come ombre solari di quelle giacenti su β. I raggi del sole determinano, in generale, una corrispondenza biunivoca tra β e α: ad ogni punto P di β corrisponde in α la sua ombra P', in particolare ogni punto della retta comune ai due piani corrisponde a se stesso. (punti uniti). Se β e α: sono sovrapposti, la corrispondenza esistente fra i loro punti P e P' diventa una trasformazione geometrica piana che gode appunto delle proprietà dell'affinità omologica.

. La direzione comune ai **raggi** si dirà **direzione della omologia affine**

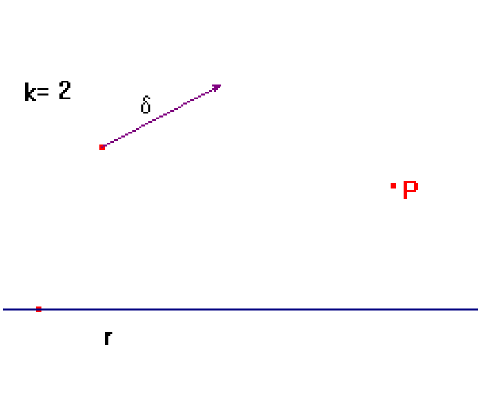
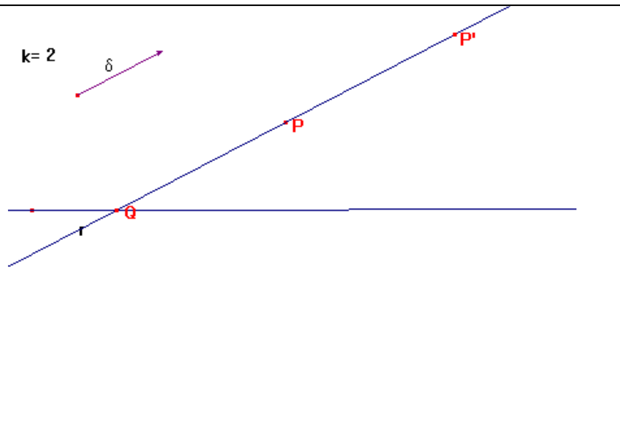
Osservazioni:

I due piani possono essere scambiati tra di loro : la trasformazione è invertibile

COSTRUZIONE CON CABRI

La proprietà 4 suggerisce una facile costruzione con Cabri

Scheda di lavoro OMOLOGIA AFFINE

Sono assegnati Una retta r Un numero reale k Un vettore di direzione δ		
	Fig 6	Fig. 7

Costruire il corrispondente del punto P nell'affinità omologica di

Asse r

direzione $\boldsymbol{\delta}$

rapporto k

a) tracciare la retta per P parallela a $\boldsymbol{\delta}$ (strumento retta parallela…)

b) evidenziare il punto Q in cui incontra l'asse r (Punto- intersezione di due oggetti)

c) costruire il punto omotetico di P nell'omotetia di centro Q e rapporto k (strumento: trasformazioni- omotetia)

d) definire una Macro:

<u>oggetti iniziali</u>

la retta r

il vettore **δ**

il numero k

il punto P

<u>oggetti finali</u>: il punto P'

e) Cambia la direzione di **δ** e il valore di k per osservare come varia la posizione di P'

OMOLOGIA AFFINE SPECIALE

- La precedente definizione di omologia affine si può generalizzare anche nel caso in cui la direzione δ sia parallela all'asse r.**In tal caso si parla di affinità omologica speciale**

L'affinità omologica speciale è la trasformazione che

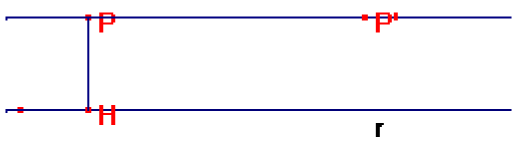
assegnata una retta r (asse dell'omologia) e un numero reale k (rapporto dell'omologia),

ad ogni punto P del piano fa corrispondere un punto P' tale che

La retta PP' sia parallela ad r

Indicata con H la proiezione di P su r, sia

$$\frac{PP'}{PH} = k$$

 fig.8	In figura 8) è rappresentata una coppia di punti corrispondenti in un'affinità omologica speciale di asse r e rapporto k= 3

La generalizzazione à giustificata dal fatto che la suddetta trasformazione si può ottenere come prodotto di due affinità omologiche aventi lo stesso asse Esempio (cfr figura 9) Dato un punto P e una retta r, si prenda su di essa un segmento Q Q' congruente a <u>PH</u> Al punto P si fa corrispondere il punto M	. La trasformazione $\Omega=\Omega_{2*}\,\Omega_1$ associa al punto P il punto P' tale che • la retta PP' è parallela ad r • il rapporto tra la lunghezza del segmento PP' e la distanza di P dalla retta r è uguale k

nell'omologia Ω_1 di asse r e direzione m, coincidente con la direzione della retta PQ', e di rapporto $h=(k+1)^{-1}$
Al punto M si fa corrispondere il punto P' nell'omologia Ω_2
di asse r, direzione m' parallela ad MQ e rapporto h^{-1}.= k+1

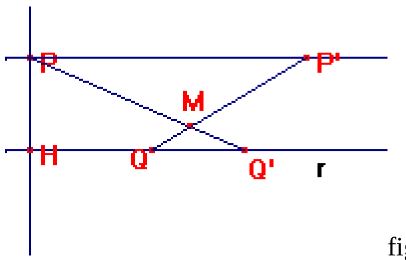


fig.9

Infatti:

Dalle relazioni

$$\frac{MQ'}{PQ'} = h \qquad \frac{MQ}{P'Q} = h$$

si deduce
PM = k MQ'
P'M= k MQ

Quindi, essendo i due triangoli MPP' E MQQ' sono fra loro omotetici di centro M e rapporto k

- la retta PP' è parallela ad r
- è verificata la relazione

$$\frac{PP'}{QQ'} = \frac{PP'}{PH} = k$$

Essendo il prodotto di due omologie affini la trasformazione Ω gode delle <u>proprietà</u>

1. **La retta r è puntualmente unita, le rette parallele ad r sono globalmente unite**
2. **Punti corrispondenti giacciono su una retta parallela ad r**
3. **Rette corrispondenti si incontrano sull'asse o sono parallele all'asse**

inoltre

4. **La trasformazione subordina su ogni retta parallela . a δ una traslazione**

Il vettore di traslazione si ottiene assoggettando il vettore PH ad una rotazione di 90* e ad un'omotetia di centro P e rapporto k

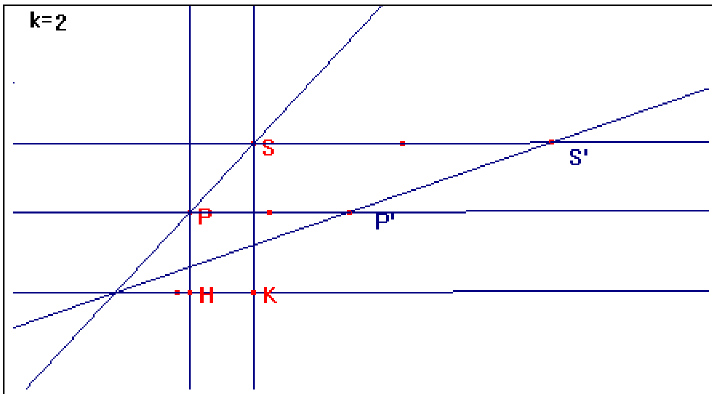


fig.10

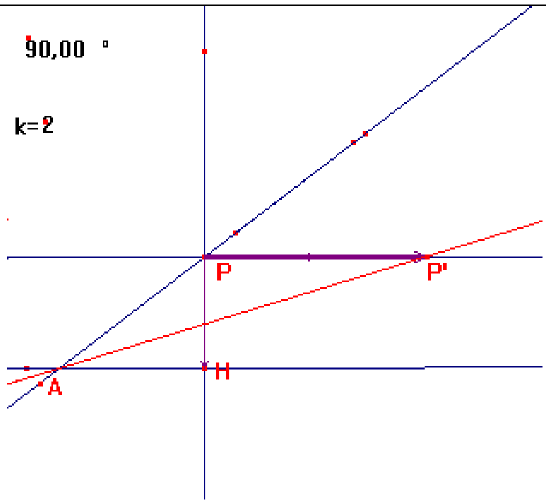
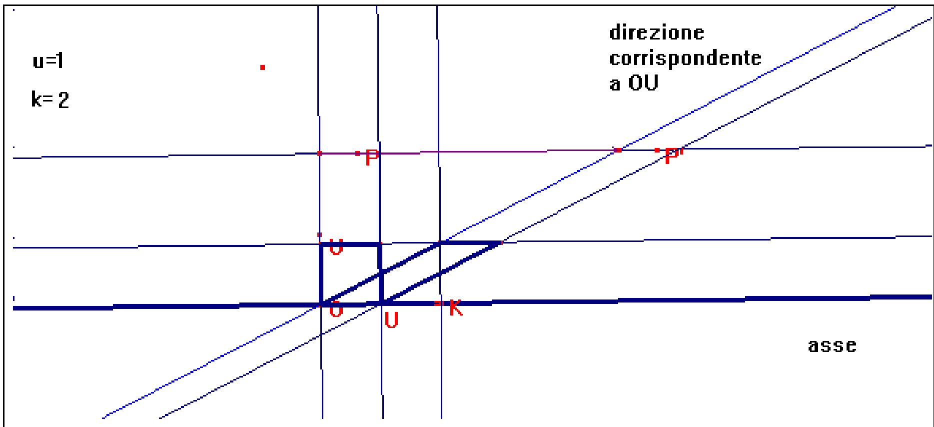


fig.11

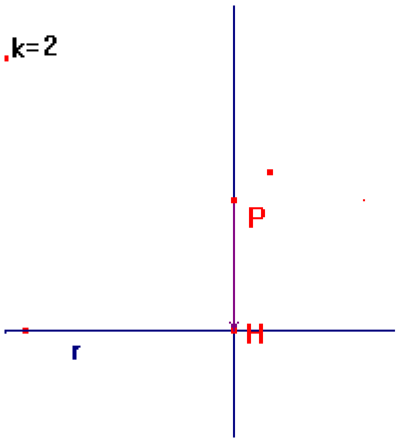
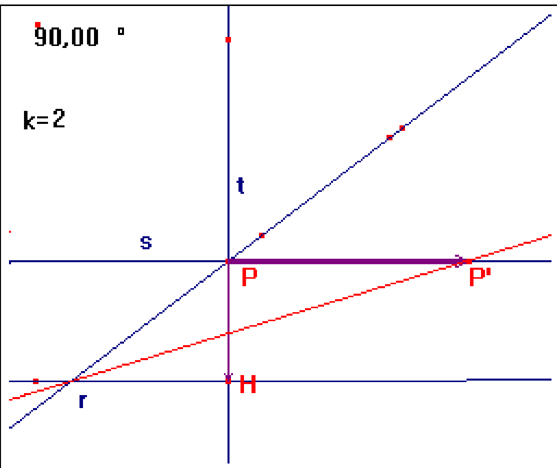
L'Omologia affine speciale conserva le aree e pertanto viene chiamata anche Omologia equivalente

 fig.12	Basta costruire il corrispondente del quadratino avente lato unitario. Si osserva che è un parallelogramma ancora di area unitaria (di uguale base e uguale altezza)

COSTRUZIONE CON CABRI

La proprietà 4 suggerisce una facile costruzione con Cabri

Scheda di lavoro OMOLOGIA AFFINE SPECIALE

Sono assegnati Una retta r Un numero reale k Costruire il corrispondente del punto P nell'omologia affine speciale di asse r e rapporto k	 fig.13	 fig.14

a) Tracciare da P la parallela s e la perpendicolare t ad r
b) Evidenziare il punto di intersezione H tra r e t
c) Disegnare il vettore PH
d) Ruotare il vettore PH di 90°

e) Dilatare il nuovo vettore nell'omotetia di centro P e rapporto k

f) Traslare il punto P mediante l'ultimo vettore costruito

g) Osservare che mentre P descrive una retta, P' descrive un'altra retta e che le due rette si incontrano sull'asse

Definire una MACRO

<u>oggetti iniziali</u>

la retta r

il numero k

il punto P

<u>oggetti finali</u>: il punto P'

EQUAZIONI DI UN' OMOLOGIA AFFINE

Omologia affine generica

Scegliamo un riferimento cartesiano con l'asse x coincidente con l'asse dell'omologia.

Per scrivere le equazioni della trasformazione ricordiamo che nella matrice

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ di una generica affinità, i valori a e c rappresentano le componenti del vettore in cui si trasforma il versore $\vec{i}$ mentre b e d rappresentano le componenti del trasformato del versore $\vec{j}$.

Pertanto, nel nostro caso, poiché $\vec{i}$ è unito, sarà : a= 1 c= 0.

Per determinare le componenti di $\vec{j}'$, osserviamo che, per come è stata definita l'omologia affine la retta congiungente i due punti corrispondenti

J e J', deve avere direzione δ, e deve incontrare

lasse in un punto Q tale che $\frac{J'Q}{JQ} = k$

pertanto possiamo scrivere $\frac{d}{1} = k \rightarrow$ d=k

$\frac{d-1}{b} = \delta \rightarrow$ b= $\frac{k-1}{\partial}$

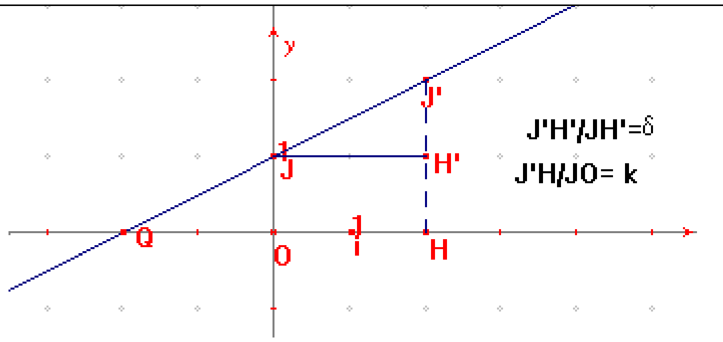


fig 14

La matrice dell'affinità omologica di direzione δ e rapporto k ha quindi la forma seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{k-1}{\partial} \\ 0 & k \end{pmatrix}$$ che, per k =1, si riduce alla matrice identica.

Equazioni

$$\begin{cases} x' = & x + by \\ y' = & ky \end{cases} \qquad \text{dove} \quad b = \frac{k-1}{\partial}$$

Omologia affine ortogonale

In questo caso J’ deve appartenere all’asse y e avere ordinata k, pertanto la matrice sarà

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

La trasformazione si riduce ad uno stiramento del fattore k nella direzione delle ordinate

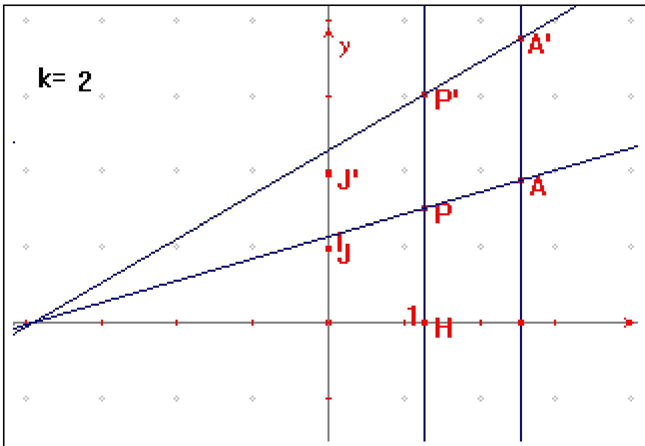


fig15

Equazioni

$$\begin{cases} x' = & x \\ y' = & ky \end{cases}$$

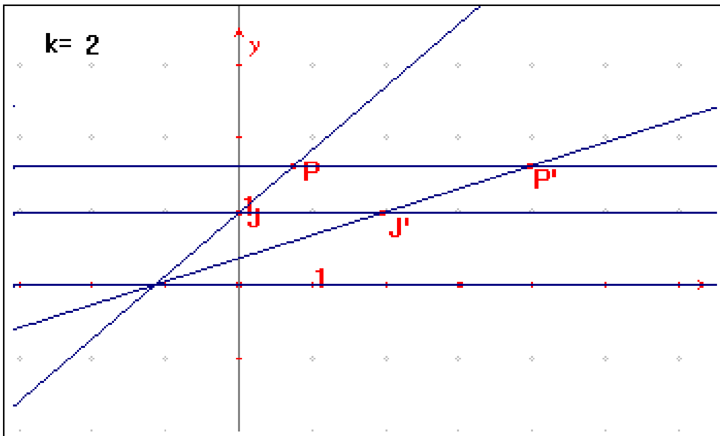
Omologia affine speciale

In questo caso J’ deve appartenere ad una retta parallela all’asse x , quindi y’=y

Inoltre deve essere verificata la relazione JJ’= k y, pertanto la matrice assume la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il determinante di quest’ultima matrice è uguale 1, in accordo col fatto che la trasformazione conserva le aree

 fig16	Equazioni $\begin{cases} x' = x + ky \\ y' = y \end{cases}$

ESERCIZI

1)Un trapezio rettangolo ABCD ha l'angolo retto in D , la base minore AB di lunghezza unitaria e la base maggiore CD doppia della minore. L'angolo BCD ha ampiezza 30°.

Calcolare perimetro e area del trapezio.

Costruire il quadrilatero che corrisponde ad ABCD nell'omologia affine che ha per asse la retta CD , per direzione quella della retta BC e per caratteristica il numero 2 e calcolarne perimetro e area..

2) Studiare la natura delle 2 trasformazioni Ω1 e Ω2 e quella del loro prodotto Ω1 *Ω2 ovvero Ω2 *Ω1

$$\Omega 1 \begin{cases} x' = & x + y \\ y' = & 3y \end{cases} \qquad \Omega 2 \begin{cases} x' = & x \\ y' = & -y \end{cases}$$

3) Scrivere le equazioni dell'omologia affine speciale che ha per asse l'asse x e che fa corrispondere all'asse y la retta di equazione y = 2x

4)Scrivere le equazioni dell' affinità Ω che associa ad ogni punto P del piano Oxy il punto P' tale che, detta H la proiezione di P sull'asse x, risulti
HP' = -2HP
Si tratta di un'affinità diretta o inversa?
Quanto vale il rapporto di affinità?
Verificare, anche mediante considerazioni geometriche, che Ω possiede una retta puntualmente unita e infinite rette globalmente unite , tra loro parallele, pertanto si tratta di un'omologia affine
Dati i punti A(-1,0) e B(-2,1), siano A' e B' i rispettivi simmetrici rispetto all'asse y.
Scrivere l'equazione della parabola γ simmetrica rispetto all'asse y, tangente alle rette AA', AB, A'B' e della curva trasformata mediante Ω. I l vertice e il fuoco della nuova parabola, sono i trasformati mediante Ω del vertice e del fuoco della prima parabola?

5) Scrivere le equazioni dell'omologia affine che fa corrispondere al punto A(1;1) il punto A'(3;2).

Indicati con P e P' due punti che si corrispondono nella suddetta omologia, determinare l'equazione e disegnare il grafico del luogo geometrico descritto da P' quando P descrive

- La circonferenza con centro nell'origine e raggio √2
- La retta di coefficiente angolare –2 e tangente alla suddetta circonferenza

6) Si consideri l'omologia affine di equazioni $\begin{cases} x =' & x \\ y' = & ky \end{cases}$

Determinare il valore di k affinché l'iperbole Γ di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

si trasformi in un'iperbole equilatera.
Disegnare l' iperbole Γ e la sua trasformata